نظرية (1) اثبت ان تابع الحال $R(x,t,\lambda)$ يحقق المعادلة التكاملية الآتية

$$R(x,T,\lambda)=k(x,T)+\lambda\int_a^b k(x,T_1)R(T_1,T,\lambda)dT_1 \quad (1)$$

البرهان

في تعريف تابع الحال

$$R(x,T,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n k_{n+1}(x,T)$$

نضرب طرفي هذه العلاقة بـ $k(y,x)$ ونكامل بالنسبة لـ $x$

$$\int_a^b R(x,T,\lambda)k(y,x)dx=\sum\lambda^n\int_a^b k_{n+1}(x,T)k(y,x)dx$$

بالاعتماد على تعريف النوى المكررة نحصل على التكامل

$$\int_a^b R(x,T,\lambda)k(y,x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n k_{n+2}(y,T)$$

نضرب طرفي هذه العلاقة بـ $\lambda$ ثم نبدل كل $n$ بـ $n-1$ فنحصل على

$$\lambda\int_a^b R(x,T,\lambda)k(y,x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n k_{n+1}(y,T)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n k_{n+1}(y,T)-k_1(y,T)$$

بالاعتماد على تعريف النوى المكررة، التابع الحال نحصل على

$$\lambda\int_a^b R(x,T,\lambda)k(y,x)dx=R(y,T,\lambda)-k(y,T)$$

$$R(x,T,\lambda)=k(y,T)+\lambda\int_a^b k(y,x)R(x,T,\lambda)dx$$

نبدل كل $y$ بـ $x$ وكل $x$ بـ $T_1$ فنحصل على العلاقة ①.

$$R(x,T,\lambda)=k(x,T)+\lambda\int_a^b k(x,T_1)R(T_1,T,\lambda)dT_1$$

وهو المطلوب

نظرية (2)

اثبت ان التابع الحال $R(x,T,\lambda)$ يحقق العلاقة

$$R(x,T,\lambda)=k(x,T)+\lambda\int_a^b k(T_1,T)R(x,T_1,\lambda)dT_1 \quad (2)$$

البرهان

في تعريف تابع الحال

$$R(x,T,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n k_{n+1}(x,T)$$

نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ $k(T,y)$ ونكامل بالنسبة لـ $t$

$$\int_a^b R(x,T,\lambda)k(T,y)dT=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\int_a^b k_{n+1}(x,T)k(T,y)dT$$

وبالاعتماد على تعريف النوى المكررة نحصل على

$$\int_a^b R(x,T,\lambda)k(T,y)dT=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n k_{n+2}(x,y)$$

نضرب طرفي العلاقة الاخيرة بـ $\lambda$ ثم نبدل كل $n$ بـ $n-1$

$$\lambda\int_a^b R(x,T,\lambda)k(T,y)dT=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n k_{n+1}(x,y)$$

$$=\sum\lambda^n k_{n+1}(x,y)-k_1(x,y)$$

بالاعتماد على تعريف النوى المكررة وعلى تعريف تابع الحال نحصل على

$$R(x,y,\lambda)=k(x,y)+\lambda\int_a^b k(T,y)R(x,T,\lambda)dT$$

نبدل كل $y$ بـ $T$ وكل $T$ بـ $T_1$ فنحصل على

$$R(x,T,\lambda) = K(x,T) + \lambda \int_a^b K(T_1,T) \cdot R(x,T,\lambda)\, dT_1$$

## نظرية الوجود والوحدانية

اذا وجد من أجل أي قيمة لـ $\lambda$ تابع مستمر $R(x,T,\lambda)$ في المربع $K_0$ يحقق نظرية (1) ونظرية (2) عندئذ يكون للمعادلة التكاملية

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,T)\, g(T)\, dT \quad ①$$

حل وحيد من اجل هذه القيمة لـ $\lambda$ ويمكن التعبير عن هذا الحل بالدستور

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,T,\lambda)\, f(T)\, dT \quad ②$$

يكون برهان هذه النظرية في مرحلتين

نبدأ أولاً بالبرهان ان كل حل للمعادلة التكاملية المعطاة (1) يمكن التعبير عنه بالدستور (2) اذا تحققت النظرية (2) و(1) ومن هذا ينتج وحدانية الحل

وثانياً نتحقق من ان العلاقة (2) تمثل حلاً للمعادلة التكاملية (1) اذا تحققت النظرية (1)

### اثبات الجزء الأول من النظرية: البرهان

ليكن $g(x)$ حلاً للمعادلة التكاملية (1) نضرب طرفي المعادلة المعطاة (1) بـ $\lambda R(y,x,\lambda)$ ثم نكامل بالنسبة لـ $x$

$$\lambda \int_a^b R(y,x,\lambda)\, g(x)\, dx = \lambda \int_a^b R(y,x,\lambda)\, f(x)\, dx + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x,T) \cdot R(y,x,\lambda)\, g(T)\, dT\, dx$$

$$= \lambda \int_a^b R(y,x,\lambda)\, f(x)\, dx + \lambda \int_a^b \left[\lambda \int_a^b R(y,x,\lambda) \cdot K(x,T)\, dx\right] dT$$

وبما ان التابع الحال يحقق النظرية (2) عندئذ نحصل على

$$\lambda \int_a^b R(y,x,\lambda)\, g(x)\, dx = \lambda \int_a^b R(y,x,\lambda)\, f(x)\, dx + \lambda \int_a^b \left[R(y,T,\lambda) - K(y,T)\right] g(T)\, dT$$

$$= \lambda \int_a^b R(y,x,\lambda) \cdot f(x)\, dx + \lambda \int_a^b R(y,T,\lambda)\, g(T)\, dT - \lambda \int_a^b K(y,T)\, g(T)\, dT$$

وبجمع الحدود المتشابهة وبالاعتماد على العلاقتين ①و②

$$0 = \lambda \int_a^b R(y,x,\lambda)\, f(x)\, dx - [g(y) - f(y)]$$

$$g(y) = f(y) + \lambda \int_a^b R(y,x,\lambda)\, f(x)\, dx$$

نبدل كل $y$ بـ $x$ وكل $x$ بـ $T$ فنحصل

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,T,\lambda)\, f(T)\, dT$$

اثبات ان الحل وحيد

نفرض وجود حلين مختلفين $g_1(x), g_2(x)$ للمعادلة (1)

وبما ان $g_1(x)$ حل للمعادلة (1) هذا يعني انه يمكن التعبير عنه بالعلاقة

$$g_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,T,\lambda)\, f(T)\, dT$$

وبما ان $g_2(x)$ حل للمعادلة (1) فإن

$$g_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b f(x,T,\lambda)\, f(T)\, dT$$

ومنه تساوي الطرف الايمن مع الايسر

$$g_1(x) = g_2(x)$$

اي ان المعادلة لها حل وحيد

اثبات الجزء الثاني

اي نبرهن ان التابع $g(x)$ المعطى بالعلاقة ② يحقق المعادلة التكاملية المعطاة ①

البرهان

نبدل العلاقة ② في المعادلة المعطاة ① ثم ننقل الناتج الى الطرف الايسر

$$f(x) + \lambda \int_a^b R(x,T,\lambda) f(T)\, dT - f(x) - \lambda \int_a^b K(x,T)\left[f(T) + \lambda \int_a^b R(T,T_1,\lambda) f(T_1)\, dT_1\right] dT = 0$$

$$\int_a^b R(x,T,\lambda) f(T)\, dT - \int_a^b K(x,T) f(T)\, dT - \lambda \int_a^b\int_a^b K(x,T) \cdot R(T,T_1,\lambda) f(T_1)\, dT_1\, dT = 0$$

نبدل في التكامل الثاني كل $T$ بـ $T_1$ وكل $T_1$ بـ $T$

$$\int_a^b \left[R(x,T,\lambda) - K(x,T) - \lambda \int_a^b K(x,T_1) \cdot R(T_1,T,\lambda)\, dT_1\right] f(T)\, dT = 0$$

لانعدام ما على القوس ① اي ان $0 = 0$

بالتالي $g(x)$ هو فعلاً يحقق المعادلة التكاملية المعطاة ①